

گاز فرمیونی در دما و چگالی دلخواه

وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۱۴ دی ۱۴۰۴

۱ مقدمه

انریکو فرمی یکی از درخشان ترین فیزیکدان های قرن بیستم است که هم در حوزه فیزیک نظری و هم فیزیک تجربی کارهای زیادی انجام داده است. آمار فرمی-دیراک در مکانیک آماری، واپاشی بتا، نخستین واکنش زنجیره ای در هسته های رادیواکتیو، و بسیاری اکتشافات دیگر در فیزیک اتمی و هسته ای همه ناشی از کارهای اوست. به خاطر انبوه تحقیقاتش، علاوه بر جوایزی مثل جایزه نوبل و جایزه های دیگر، بسیاری چیزها نیز نام فرمی را به یدک می کشند، از جمله: نام ذره فرمیون، آزمایشگاه فرمی در شیکاگو، تلسکوپ فضایی گامای فرمی، سه راکتور هسته ای در آمریکا، یک نیروگاه هسته ای در ایتالیا و یک راکتور تحقیقاتی در آرژانتین و البته یک عنصر در جدول تناوبی به نام فرمیوم. از گفته های معروف اوست که:

«هرچیزی که طبیعت به انسان عرضه می کند، هرچند ناخوشایند، باید به استقبالش رفت، چرا که نادانی هیچگاه بهتر از دانش نیست.» در بین فیزیکدانان هم نسل اش فرمی عمر خیلی کوتاهی داشت و در سالیانی که از او دریغ شد چه بسا می توانست به کشفیات بیشتری هم دست یابد. فرمی در اکتبر ۱۹۵۴ تحت یک عمل جراحی قرار گرفت و پنجاه روز بعد بر اثر سرطان معده در ۵۳ سالگی در خانه اش در شیکاگو درگذشت. مراسم یادبود وی در کلیسای کوچک دانشگاه شیکاگو برگزار شد، جایی که چندتن از همکارانش برای عزاداری از دست دادن یکی از «درخشان ترین و سازنده ترین فیزیکدان های جهان» سخنرانی کردند.



شکل ۱: انریکو فرمی (۱۹۰۱-۱۹۵۴)

در درس های گذشته ابزارهای لازم برای بررسی یک سیستم فرمیونی ایده آل را فراهم آوردیم. هم چنین گاز فرمیونی سه بعدی را در دمای صفر مطالعه کردیم. به صورت کیفی نیز نشان دادیم که وقتی دما بیشتر از صفر می شود طرح پراکندگی ذرات در سطوح مختلف انرژی به چه شکل در می آید. در این درس گاز فرمیونی را با تفصیل بیشتری مطالعه می کنیم. این تفصیل به دو صورت است: نخست آنکه گاز را در دمای غیر صفر بررسی می کنیم و دوم اینکه آن را در بعد دلخواه مطالعه می کنیم. البته بدیهی است که مطالعه یک گاز در بعد بیشتر از ۳ کاربرد فیزیکی مشخصی ندارد، اما فایده اش این است که به وضوح اثر بعد را در این مطالعه و شیوه تاثیر اصل طرد پاولی را می بینیم. خواهیم دید که هر چه بعد بیشتر باشد، اثر طرد پاولی ضعیف تر است، دلیل شهودی اش هم این است که فرمیون ها جای بیشتری برای پرهیز از یکدیگر و فرار از نیروی مجازی دافعه نسبت به هم دارند. به عبارت دیگر هر چه که بعد بیشتر باشد، رفتار گاز فرمیونی به گاز کلاسیک شبیه تر است. علاوه بر این مشاهده کلی، مطالعه گاز فرمی در دو بعد نیز کاربرد مهم و گسترده ای دارد. در بسیاری از قطعات الکترونیک که از لایه های نیم رسانا بروی هم تشکیل شده، یک گاز الکترونی ایده آل بین این لایه ها تشکیل می شود. این گاز البته در فضای سه بعدی زندگی می کند، انرژی یک ذره آزاد در این محیط

برابر است با:

$$\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2} + \frac{n_z^2}{l^2} \right), \quad (1)$$

که در آن L ابعاد عرضی و طولی نیمه هادی ها و l فاصله بین آنهاست و $l \ll L$ است. در این صورت برای پایین آوردن انرژی به صرفه تر است که اعداد کوانتومی n_x, n_y بتوانند هر مقدار دلخواهی را اختیار کنند ولی n_z همچنان صفر باقی بماند و مقداری جز آن را اختیار نکند. نتیجه اش این است که گاز عملاً در دوبعد محبوس می شود و ما با یک گاز الکترونی دو بعدی سروکار خواهیم داشت. به همین دلیل است که می توان گفت گاز الکترونی دو بعدی واقعاً وجود دارد. علاوه بر نیمه هادی ها، در انواعی دیگر از شرایط نیز گاز الکترونی دو بعدی تشکیل میشود، مثلاً روی سطح هلیوم مایع، یا روی سطح یک عایق توپولوژیک و نظایر آن. خواننده برای مطالعه بیشتر می تواند به منابع تخصصی این موضوع مراجعه کند.

۲ تابع پارش گاز فرمیونی در بعد دلخواه

فرض می کنیم که فرمیون ها در درون ظرفی مکعبی با ابعاد L قرار گرفته اند. هم چنین برای حفظ کلیت فرض می کنیم که این ظرف مکعبی d بعدی است. نخست سطوح انرژی یک تک ذره را حساب می کنیم. مکانیک کوانتومی به ما می آموزد که انرژی یک ذره در چنین جعبه ای برابر است با:

$$\epsilon_\ell = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} (l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_d^2), \quad (2)$$

که در آن l_1 تا l_d اعداد صحیح مساوی یا بزرگ تر از صفر هستند. قبلاً یاد گرفته ایم که تعداد کل ذرات، تعداد متوسط ذرات در هر لایه انرژی، انرژی کل و تابع پارش گراندکانونیک یک گاز فرمی در دمای دلخواه به صورت زیر است: خواننده برای یادآوری این روابط می بایست به درسهای مکانیک آماری کوانتومی (I) و (II) مراجعه کند. در تمام روابطی که در پی می آید از نماد زیر استفاده می کنیم:

$$\sum_\ell \equiv \sum_{l_1, l_2, \dots, l_d} .$$

$$N = \sum_\ell \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_\ell} + 1}, \quad (3)$$

$$n_l = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_l} + 1} \quad (4)$$

$$U = \sum_l \frac{\epsilon_l}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_l} + 1} \quad (5)$$

$$\frac{PV}{kT} = \sum_l \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon_l}). \quad (6)$$

در این روابط طرف راست بر حسب پارامتری مثل z بسط داده شده اند. می خواهیم طرف راست را به صورت انتگرال هایی درآوریم، این انتگرال ها را محاسبه کنیم و سپس پارامتر z را بین آنها حذف کنیم تا بتوانیم به روابط ترمودینامیکی دست پیدا کنیم. با توجه به این که

$$0 \leq n_l \leq 1$$

، می دانیم که محدوده پارامتر z چنین است:

$$0 \leq z \leq \infty.$$

از آنجا که $z = e^{\beta\mu}$ است، محدوده بالا برای پارامتر z به این معناست که μ می تواند هر مقدار مثبت یا منفی ای را اختیار کند. از تعریف ترمودینامیکی و رابطه

$$dU = TdS - PdV + \mu dN$$

می دانیم که μ میزان تغییر انرژی است وقتی که حجم و انتروپی را ثابت نگاه داریم. در نگاه اول ممکن است عجیب به نظر برسد که با افزایش ذره انرژی سیستم کاهش پیدا کند، اما باید توجه کنیم که در اینجا منظور از تغییرات انرژی است وقتی که انتروپی را ثابت نگاه داشته ایم. این ثابت نگاه داشتن انتروپی است که باعث منفی شدن پتانسیل شیمیایی می شود. به این نکته در ادامه درس بازخواهیم گشت. فعلا می بایست یک مقدمه برای چگونگی تبدیل این جمع ها به انتگرال ها یاد بگیریم.

۳ یک مقدمه ریاضی: تبدیل جمع روی حالت ها به انتگرال

اعداد $l_1, l_2, \dots, l_d$ اعداد کوانتومی نشان دهنده ویژه حالت های انرژی هستند. این اعداد، مثبت و صحیح هستند و همگی در شرط $0 \leq l_i < \infty$ صدق می کنند. برای تجسم بهتر d را برابر با 2 می گیریم. آنچه که برای این بعد می آموزیم به راحتی به ابعاد دلخواه نیز تعمیم پیدا می کند. نکته

مهم این است که تابع پارش مستقما به l_i ها بستگی ندارد بلکه بستگی آن از طریق تکانه های $k_i = \frac{\pi}{L} l_i$ است. ($\hbar$ را برابر با یک گرفته ایم). اگر وقتی که l_i ها تغییر می کنند، k_i خیلی به آهستگی تغییر کند می توانیم جمع روی l_i ها را به انتگرال روی k_i تبدیل کنیم. برای این کار کافی است محاسبه کنیم که به ازای هر بازه کوچک Δk_i چه تعداد نقطه در شکل (۲) وجود دارد. این تعداد را از روی شکل می توان تعیین کرد: دیده می شود که در هر امتدادی این تعداد برابر است با:

$$\Delta l_i = \frac{\Delta k_i}{\frac{\pi}{L}}$$

و در نتیجه در بعد دلخواه d قاعده زیر را برای تبدیل جمع به انتگرال داریم:

$$\sum_{\ell} = \left(\frac{L}{\pi}\right)^d \int_0^{\infty} dk_1 dk_2 \cdots dk_d \quad (۷)$$

و اگر تابع انتگرالده تنها به اندازه k بستگی داشته باشد، می توان انتگرال را به صورت زیر نوشت که در آن این موضوع نیز رعایت شده است که جمع و در نتیجه انتگرال روی k_i های مثبت صورت می گیرد:

$$\sum_{\ell} = \frac{V}{(2\pi)^d} \Omega_{d-1} \int_0^{\infty} k^{d-1} dk \quad (۸)$$

که در آن Ω_{d-1} سطح کره $d-1$ بعدی است. رابطه (۸) یک رابطه اساسی است که به راه های مختلف در محاسبات مکانیک آماری و نظریه کوانتومی پدیدار می شود و بنابراین می بایست نحوه استخراج آن را به خوبی فرا گرفت. در موضوعی که با آن سر و کار داریم تابع زیر انتگرال تابعی است از $\beta\epsilon = \beta \frac{\hbar^2}{2m} k^2$. یعنی با انتگرال های از نوع زیر سر و کار داریم:

$$\sum_{\ell} F(\beta\epsilon_{\ell}) = \frac{V\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} \int_0^{\infty} k^{d-1} dk F(\beta\epsilon). \quad (۹)$$

بنابر این بهتر است که متغیر انتگرال را $x = \beta\epsilon$ بگیریم. برای این کار می بایست بنویسیم:

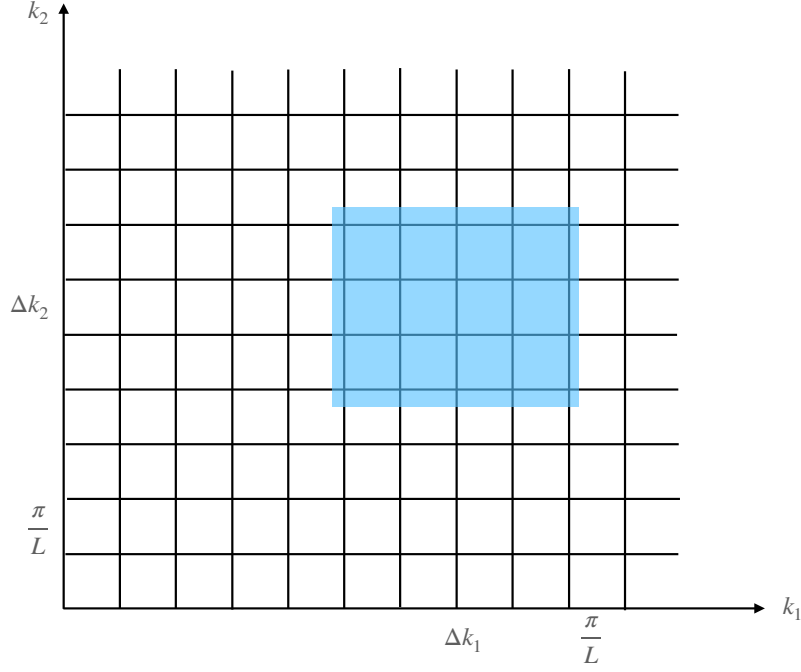
$$x = \beta\epsilon = \beta \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \quad (۱۰)$$

و از آنجا

$$k = \left(\frac{2m}{\beta\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\lambda} x^{\frac{1}{2}}, \quad (۱۱)$$

که در آن $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi mkT}}$ طول موج گرمایی است. بنابراین

$$\frac{V\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} k^{d-1} dk = \frac{V\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} \frac{2^d \pi^{\frac{d}{2}}}{\lambda^d} \frac{1}{2} x^{\frac{d}{2}-1} dx = \frac{V}{\lambda^d} \left(\frac{\Omega_{d-1}}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\right) x^{\frac{d}{2}-1} dx \quad (۱۲)$$



شکل ۲: در هر فاصله Δk_i تعداد $\Delta n_i = \frac{\Delta k_i}{\frac{\pi}{L}}$ تا نقطه وجود دارد.

اما می دانیم که

$$\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

بنابر این به رابطه ساده زیر می رسم:

$$\sum_{l_1, l_2, \dots, l_d} F(\beta \epsilon_l) = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} dx F(\beta \epsilon_x). \quad (۱۳)$$

رابطه فوق برای هر تابعی درست است. این رابطه یک رابطه کلی است که بیان می کند جمع روی ویژه مقادیر انرژی را چگونه به یک انتگرال تبدیل کنیم. حال از این رابطه اساسی استفاده می کنم و برای فرمئون ها روابط (۳) تا (۶) را به صورت انتگرال بازنویسی می کنیم. بدست می آوریم:

$$N = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}-1} dx}{1 + z^{-1} e^x} \quad (۱۴)$$

$$\frac{U}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}} dx}{1 + z^{-1}e^x} \quad (۱۵)$$

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 + ze^{-x}) dx. \quad (۱۶)$$

نخست به رابطه (۱۶) دقت می کنیم. می توان با انجام یک انتگرال جزء به جزء طرف راست را به شکل دیگری نوشت:

$$\int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} dx \ln(1 + ze^{-x}) = \frac{2}{d} \left[x^{\frac{d}{2}} \ln(1 + ze^{-x}) \right]_0^\infty + \frac{2}{d} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}}}{1 + z^{-1}e^x} dx \quad (۱۷)$$

عبارت اول در هر دو حد $x \rightarrow 0$ و $x \rightarrow \infty$ برابر با صفر خواهد شد. بنابراین بدست می آوریم:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}}}{1 + z^{-1}e^x} dx \quad (۱۸)$$

و در نتیجه از مقایسه این رابطه با رابطه (۱۵) به رابطه کلی زیر می رسم که همواره برای یک سیستم فرمیونی درست است:

$$PV = \frac{2}{d} U. \quad (۱۹)$$

بنابراین اگر تابع فرمیونی $f_n(z)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$f_n(z) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{1 + z^{-1}e^x} \quad (۲۰)$$

آنگاه رابطه اصلی به شکل زیر در خواهد آمد:

$$N = \frac{V}{\lambda^d} f_{\frac{d}{2}}(z), \quad \frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} f_{\frac{d}{2}+1}(z), \quad U = \frac{d}{2} PV. \quad (۲۱)$$

توابع $f_n(z)$ یک خصوصیت جالب دارند. برای بدست آوردن آن دقت می کنیم که

$$z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 + z^{-1}e^x} \right) = \frac{1}{(1 + z^{-1}e^x)^2} z^{-1}e^x = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + z^{-1}e^x} \right) \quad (۲۲)$$

با استفاده از این رابطه انجام یک انتگرال جزء به جزء

می رسم به این که:^۱

$$z \frac{d}{dz} f_n(z) = f_{n-1}(z). \quad (۲۳)$$

، برای محاسبه ظرفیت گرمایی ویژه و بعضی از کمیت های دیگر احتیاج داریم که کمیت $(\frac{\partial z}{\partial T})_{N,V}$ را حساب کنیم.

■ **یادآوری یک نکته:** در آنزامل گراندکانونیک گفتیم که متغیرهای z و T متغیرهای مستقلی هستند. بنابراین خواننده کنجکاو و دقیق ممکن است بپرسد با توجه به استقلال این دو متغیر از هم مشتق آنها نسبت به هم چه معنایی دارد. پاسخ این است: درست است که در آنزامل گراندکانونیک، متغیرهای مستقل عبارت اند از: z, V, T . در نتیجه تابع پارش، فشار و تعداد ذرات همگی توابعی از این سه متغیر خواهند بود. به خصوص خواهیم داشت:

$$N = N(z, V, T).$$

اما اگر N, V و T را متغیر مستقل بگیریم، یعنی این رابطه را معکوس کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$z = z(N, V, T)$$

که به این معناست که z تابعی از دما خواهد شد. در واقع تحت این شرایط است که $(\frac{\partial z}{\partial T})_{N,V}$ معنا پیدا می کند.

برای این کار از طرفین اولین رابطه (۲۱) یعنی $\frac{N}{V} = \lambda^{-d} f_{\frac{d}{2}}(z)$ نسبت به T و در (N, V) ثابت مشتق می گیریم. بدست می آوریم:

$$0 = -d \times \lambda^{-d-1} \frac{d\lambda}{dT} f_{d/2}(z) + \lambda^{-d} \left(\frac{d}{dz} f_{d/2}(z) \right) \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{N,V}. \quad (۲۴)$$

با توجه به تعریف طول موج گرمایی λ می دانیم که

$$\frac{d\lambda}{dT} = \frac{-1}{2} \frac{\lambda}{T}. \quad (۲۵)$$

بنابراین با جایگذاری در این رابطه و ساده کردن آن خواهیم داشت:

$$0 = d \times \left(\frac{1}{2} \frac{1}{T} \right) f_{d/2}(z) + \frac{1}{z} f_{d/2-1}(z) \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{N,V} \quad (۲۶)$$

^۱ برای اثبات به ضمیمه ی درس رجوع کنید.

و از آنجا

$$\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_{N,V} = -\frac{zd}{2T} \frac{f_{d/2}}{f_{\frac{d}{2}-1}} \quad (27)$$

بعد از این مقدمات، اکنون آماده ایم که گاز فرمی را در دمای دلخواه مطالعه کنیم. نخست به سراغ دمای صفر می رویم. اما قبل از آن برای مراجعه آینده مفید است که بسط تابع $f_n(z)$ را برای z های کوچک و z در این جا بنویسیم. این بسط ها در آینده هم اثبات خواهند شد و هم کاربرد آنها مشخص خواهد شد.

۱.۳ بسط های توابع فرمیونی

تابع $f_n(z)$ را یک تابع فرمیونی می خوانیم. شناخت خصوصیات این توابع برای درک روابط ترمودینامیکی در محدوده های متفاوت مهم است. در این جا برای راحتی کار خود در آینده دو نوع بسط از تابع $f_n(z)$ را می نویسیم. اثبات این روابط و کاربرد آنها موضوع بخش های آینده خواهد بود.

■ بسط تابع $f_n(z)$ برای $(z < 1)$:

$$f_n(z) = z - \frac{z^2}{2^n} + \frac{z^3}{3^n} - \frac{z^4}{4^n} + \dots \quad (28)$$

■ بسط تابع $f_n(z)$ برای $(z > 1)$: در این محدوده تابع $f_n(z)$ را می توان بر حسب قوای منفی از پارامتر $z := \ln z$ بسط داد. این بسط به صورت زیر است:

$$f_n(\xi) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \xi^n \left[1 + n(n-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\xi^2} + n(n-1)(n-2)(n-3) \frac{7\pi^4}{360} \frac{1}{\xi^4} + \dots \right]. \quad (29)$$

دقت کنید که وقتی n عدد صحیح است، بسط فوق یک چند جمله ای متناهی است. به عنوان مثال داریم:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \xi \\ f_{3/2}(z) &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \xi^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\xi^2} - \frac{7\pi^4}{960} \frac{1}{\xi^4} + \dots \right] \\ f_2(z) &= \frac{1}{2} \xi^2 \left[1 + \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{\xi^2} \right] \\ f_{5/2}(z) &= \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \xi^{\frac{5}{2}} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \frac{1}{\xi^2} - \frac{7\pi^4}{384} \frac{1}{\xi^4} + \dots \right] \end{aligned} \quad (30)$$

۴ گاز فرمیونی در دماهای زیاد یا چگالی های کم ($z < 1$)

به صورت کیفی در این محدوده ما عملاً با گاز کلاسیک روبرو هستیم و آثار کوانتومی به صورت خیلی کم در آن قابل مشاهده است. ذرات گاز در همه ترازهای انرژی پخش شده اند و طرح پراکندگی ذرات در ترازهای انرژی به صورت نشان داده در شکل (۳) است.

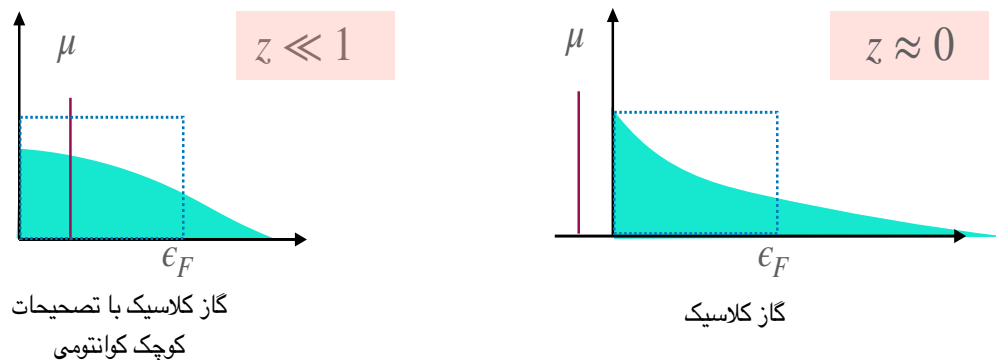
در این محدوده، از بسط (۲۸) استفاده می کنیم.

۱.۴ تقریب صفرم

در تقریب صفرم اولین جمله بسط را نگاه می داریم و قرار می دهیم $z \approx f_n(z)$. در واقع در تقریب صفرم، فرض ما این است که دما آنقدر بالا یا چگالی آنقدر کم است که می توانیم از مرتبه های بالاتر از صرف نظر کنیم. در واقع در این حد طول موج گرمایی ذرات نسبت به فاصله بین آنها بسیار کوچک شده، برای همین ذرات از هم تمیز پذیر شده اند. در این شرایط آثار کوانتومی قابل ملاحظه نیستند و انتظار داریم که در این حد تصویر کلاسیک گاز را بازیابی کنیم. در این حد تعداد متوسط ذرات در هر تراز کوانتومی که به صورت $n_l = \frac{1}{1+z^{-1}e^{\beta\epsilon_l}}$ است به حد

$n_l = ze^{-\beta\epsilon_l}$ میل می کند. در نتیجه احتمال حضور ذره در یک تراز l برابر است با

$$P_l = \frac{n_l}{\sum_l n_l} = \frac{e^{-\beta\epsilon_l}}{\sum_l e^{-\beta\epsilon_l}} = \frac{1}{Z} e^{-\beta\epsilon_l} \quad (31)$$



شکل ۳: چگالی ذرات در لایه های انرژی یک گاز فرمی در دماهای بالا یا چگالی های کم. در تقریب صفرم یعنی وقتی که $(z \ll 1, z \rightarrow 0)$ است، گاز فرمی مثل یک گاز کلاسیک رفتار می کند و احتمال اشغال حالت ها توسط تابع بولتزمن داده می شود. با بزرگتر شدن این پارامتر مجبور می شویم تقریب های بالاتر را نیز در نظر بگیریم. بنابراین، آثار کوانتومی و اصل طرد پاولی به تدریج در گاز ظاهر می شوند. در همه روابط ترمودینامیکی این تصحیحات کوانتومی ظاهر می شوند. دقت کنید که در دماهای بالا پتانسیل شیمیایی می تواند منفی باشد.

که در آن Z همان تابع پارش است. در این حد گاز فرمی رفتاری کاملاً کلاسیک دارد و همان رفتاری را دارد که تا کنون مطالعه کرده ایم. در این حد قرار می دهیم $z \rightarrow 0$. در نتیجه از رابطه (۲۸) خواهیم داشت $z \rightarrow f_n(z)$ و در نتیجه از روابط (۲۱) بدست می آوریم:

$$N = \frac{V}{\lambda^d} z, \quad \frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} z, \quad U = \frac{d}{2} PV. \quad (32)$$

با حذف z به روابط آشنای گاز ایده آل کلاسیک در d بعد می رسیم:

$$PV = NkT, \quad U = \frac{d}{2} NkT. \quad (33)$$

در این حد کمیت های ترمودینامیکی مثل ظرفیت گرمایی یا ضریب تراکم پذیری همدماً براحتی محاسبه می شوند. داریم:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N,V} = \frac{d}{2} Nk, \quad \kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{N,T} = \frac{1}{P}. \quad (34)$$

این روابط همان روابط گاز کلاسیک هستند و آثار کوانتومی و اصل طرد پاولی قابل مشاهده نیستند.

۲.۴ تقریب های بالاتر

حال می توانیم مرتبه های بالاتر را در بسط (۲۸) از توابع $f_n(z)$ نگه می داریم. به این ترتیب تصحیحات کوچک کوانتومی را بر روابط گاز کلاسیک پیدا می کنیم. هر چه که دما را پایین تر بیاوریم یا چگالی را زیاد کنیم، آثار کوانتومی و تصحیحات اعمال شده بر رفتار گاز کلاسیک بیشتر می شوند. پارامتری که کوانتومی بودن گاز را نشان می دهد همان $n\lambda^d$ است.

پارامتر $n\lambda^d$ یک پارامتر کنترلی است که می توانیم آن را از قبل و با توجه به شرایط خارجی مشخص کنیم. در این حد، یعنی حد دماهای نسبتاً بالا یا چگالی های کم، این پارامتر بسیار کوچک است و طبیعی است که همین پارامتر به عنوان پارامتری برای بسط نیز به کار می رود. در واقع انتظار داریم که در این حد برای معادله حالت به بسطی از نوع زیر برسیم:

$$\frac{PV}{kT} = N(1 + b_1(n\lambda^d) + b_2(n\lambda^d)^2 + \dots) \quad (۳۵)$$

که در آن ضرایب b_l ، موسوم به ضرایب ویرال،^۲ ضرایبی قابل محاسبه اند. با داشتن این رابطه انرژی نیز به عنوان یک بسط ویرال بدست می آید. سپس بقیه کمیت های ترمودینامیکی مثل ظرفیت گرمایی ویژه و انتروپی نیز به صورت بسط های ویرال محاسبه می شوند. راه بدست آوردن بسط ویرال بسیار ساده است. بسته به دقتی که در نظر داریم از بسط (۲۸) استفاده کرده و با معکوس کردن سری

$$n\lambda^d = f_{d/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{d/2}} + \frac{z^3}{3^{d/2}} - \dots \quad (۳۶)$$

z را به صورت یک سری از $n\lambda^d$ می نویسیم. البته واضح است که بسته به رتبه تقریبی که می خواهیم نیازی به نوشتن همه جملات سری ها نداریم. سپس می توان پارامتر z را در بسط تابع $f_{d/2+1}(z)$ قرار دهیم تا بسط ویرال بدست آید. می خواهیم بسط ویرال معادله حالت یعنی رابطه (۳۵) را تا رتبه ۱ از $n\lambda^d$ بدست بیاوریم. داریم:

$$y = n\lambda^d = z - \frac{z^2}{2^{d/2}} + \dots$$

قرار می دهیم:

$$z = y + ay^2 + \dots$$

با جایگذاری رابطه دوم در رابطه اول بدست می آوریم:

$$y = (y + ay^2 + \dots) - \frac{1}{2^{d/2}}(y + \dots)^2 + \dots$$

^۲Virial Coefficients

و با مقایسه طرفین $a = \frac{1}{2^{d/2}}$ ، بنابراین

$$z = y + \frac{1}{2^{d/2}}y^2 + \dots$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} f_{d/2+1}(z) &= z - \frac{z^2}{2^{d/2+1}} + \dots \\ &= y + \frac{1}{2^{d/2}}y^2 + \dots - \frac{1}{2^{d/2+1}}y^2 + \dots = y + \frac{1}{2^{d/2+1}}y^2 + \dots \end{aligned}$$

که در آن جملات $\dots$ از مرتبه y^3 به بالا هستند. بنابراین $b_2 = \frac{1}{2^{d/2+1}}$ و در نتیجه

$$\frac{PV}{kT} = N\left(1 + \frac{1}{2^{d/2+1}}(n\lambda^d) + \dots\right) \quad (37)$$

دیده می شود که فشار گاز از حالت کلاسیک کمی بیشتر است و این فشار به خاطر دافعه فرمیون هاست. این رابطه تصحیحات اعمال شده به معادله ی حالت گاز ایده آل را بر حسب قوای متوالی $n\lambda^d$ بدست می دهد. هر چقدر که $n\lambda^d$ کوچک تر باشد، توان های کمتری را نگاه می داریم و گاز رفتار نزدیک تری به گاز کلاسیک خواهد داشت. اما با بزرگ تر شدن $n\lambda^d$ می بایست جملات بیشتری را نگاه داشت که در این صورت رفتار گاز از یک گاز کلاسیک دور و دورتر می شود. هم چنین دیده می شود که هر چه بعد d بالاتر باشد، مقدار این نیروی دافعه کمتر می شود، چرا که فضای بیشتری برای پرهیز فرمیون ها از یکدیگر وجود خواهد داشت. می توانیم به همین ترتیب ضریب تراکم پذیری همدمای گاز فرمی را نیز بدست آوریم. از رابطه (37) می توانیم مشتق فشار را نسبت به حجم محاسبه کنیم. برای سادگی عبارت ها و روابط ریاضی قرار می دهیم $b = \frac{1}{2^{d/2+1}}$. خواهیم داشت:

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{-NkT}{V^2} \left[1 + b\frac{N\lambda^d}{V}\right] + \frac{NkT}{V} \left(-b\frac{N\lambda^d}{V^2}\right) = \frac{-NkT}{V^2} \left[1 + 2b\frac{N\lambda^d}{V}\right] \quad (38)$$

بنابراین تراکم پذیری برابر خواهد شد با:

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{N,T} = \frac{1}{P} \frac{1}{1 + 2bn\lambda^d} \quad (39)$$

و با جایگزینی پارامتر b نهایتاً بدست می آوریم:

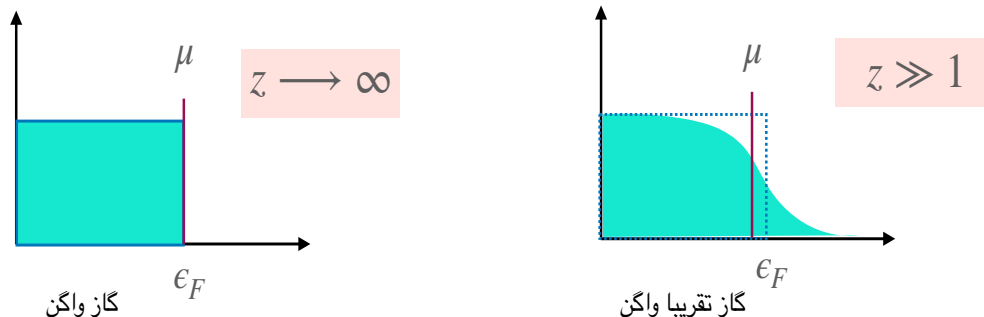
$$\kappa_T = \frac{1}{P} \frac{1}{1 + \frac{1}{2^d}n\lambda^d}. \quad (40)$$

طبیعی است که تراکم پذیری نسبت به گاز کلاسیک کمتر است و این کاهش همانطور که انتظار داریم، ناشی از دافعه موثر بین فرمیون هاست. همچنین از رابطه بالا معلوم است که هر چه بعد بیشتر شود، تراکم پذیری بیشتر می شود که بازهم ناشی از این است که فرمیون ها جای بیشتری

برای پرهیز از یکدیگر دارند و به همین دلیل با افزایش فشار حجم براحتی کاهش پیدا می کند.

۵ گاز فرمی در دماهای کم یا چگالی های زیاد ($z > 1$)

در این محدوده پارامتر z بزرگتر از یک است و باید از بسط (۲۹) برای توابع $f_n(z)$ استفاده کنیم. در این محدوده آثار کوانتومی بسیار شدید هستند. ذرات گاز بیشتر در ترازهای زیر انرژی فرمی و کمی هم اطراف آن پخش شده اند و طرح پراکندگی ذرات در ترازهای انرژی به صورت نشان داده در شکل (۴) است.



شکل ۴: چگالی ذرات در لایه های انرژی یک گاز فرمی در دماهای پایین یا چگالی های زیاد. در تقریب صفرم یعنی وقتی که ($z \gg 1$) است، گاز فرمی کاملاً واکن خوانده می شود. در این شرایط تمام لایه های زیر سطح فرمی پر و تمام لایه های بالاتر از آن خالی هستند. به تدریج که دما بیشتر می شود، ترازهای نزدیک و پایین تر از سطح فرمی خالی شده و ذرات به ترازهای بالاتر می روند. در تقریب صفرم پتانسیل شیمیایی همان انرژی فرمی است ولی با بالا رفتن دما پتانسیل شیمیایی به تدریج کم می شود.

۱.۵ تقریب صفرم

در این تقریب پارامتر z آنقدر بزرگ است که در بسط های (۲۹) فقط جمله اول را نگاه می داریم و می نویسیم

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} (\ln z)^n. \quad (۴۱)$$

در این شرایط حذف z بین روابطی که فشار و تعداد ذرات را بیان می کنند به سادگی انجام می شود و براحتی به معادلات حالت و انرژی گاز فرمی در دمای صفر می رسم. بنابراین در این حد داریم:

$$N = \frac{V}{\lambda^d} f_{d/2}(z) = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(d/2+1)} \xi^{\frac{d}{2}} \quad (۴۲)$$

پارامتر ξ را در این دما با ξ_0 نشان می دهیم و پتانسیل شیمیایی را نیز در این دمای خاص با ϵ_F نشان می دهیم. بنابراین می نویسیم:

$$\xi_0 = \beta \epsilon_F \quad (۴۳)$$

به این ترتیب تعداد ذرات برابر خواهد شد با:

$$N = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(d/2+1)} (\beta \epsilon_F)^{\frac{d}{2}} \quad (۴۴)$$

حال با توجه به این که طول موج گرمایی برابر است با

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m}} \beta^{\frac{1}{2}} \quad (۴۵)$$

پس از کمی محاسبه به نتیجه زیر می رسم که انرژی فرمی را بر حسب چگالی ذرات بدست می دهد:

$$\epsilon_F = \left(\frac{h^2}{2\pi m} \right) \left(\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right) \right)^{\frac{2}{d}} n^{\frac{2}{d}}. \quad (۴۶)$$

سپس به معادله حالت می پردازیم که برابر است با:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} f_{d/2+1}(z) \quad (۴۷)$$

با تقسیم این رابطه بر N معلوم می شود که

$$\frac{PV}{NkT} = \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)} = \xi \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2+1)} \quad (48)$$

و یا

$$\frac{PV}{NkT} = \frac{2}{d+2} \beta \epsilon_F \quad (49)$$

به این ترتیب معادله حالت به شکل ساده زیر در می آید:

$$PV = \frac{2}{d+2} N \epsilon_F \quad (50)$$

و با توجه به رابطه انرژی و فشار خواهیم داشت:

$$U = \frac{d}{2} PV = \frac{d}{d+2} N \epsilon_F. \quad (51)$$

برای آنکه توابع پاسخ ترمودینامیکی مثل ضریب تراکم پذیری را حساب کنیم، می بایست دقت کنیم که انرژی فرمی خود تابعی از حجم نیز هست.

بنابراین به رابطه زیر توجه می کنیم

$$\left(\frac{\partial \epsilon_F}{\partial V}\right)_{N,T} = -\frac{2}{d} \frac{\epsilon_F}{V}. \quad (52)$$

و از آنجا بدست می آوریم

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{N,T} = \left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_{N,T} \left(\frac{2}{d+2} \frac{N \epsilon_F}{V}\right) \quad (53)$$

یا پس از ساده کردن:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{N,T} = -\frac{2N}{V} \frac{\epsilon_F}{d}. \quad (54)$$

به این ترتیب شکل نهایی تراکم پذیری محاسبه می شود:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{N,T} = \frac{Vd}{2N \epsilon_F}. \quad (55)$$

دیده می شود که تراکم پذیری با افزایش بعد زیاد می شود که بازهم به این دلیل است که در ابعاد بالا ذرات فرمی جای بیشتری برای پرهیز از

یکدیگر دارند و افزایش فشار بر راحتی بیشتری باعث تغییر حجم می شود.

آیا راه ساده تری نسبت به استفاده از بسط (۲۹) برای مطالعه گاز فرمی در دمای صفر وجود دارد؟ پاسخ اش این است که دقیقاً در دمای صفر، بلکه یک راه ساده تر وجود دارد. کافی است به تابع اشغال حالت ها نگاه کنیم. می دانیم که در این دما، تعداد متوسط ذرات در هر لایه به شکل زیر است:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{1 + z^{-1}e^x} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{x - \beta\epsilon_F}} = \theta(\beta\epsilon_F - x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < \beta\epsilon_F \\ 0 & \text{if } x > \beta\epsilon_F \end{cases} \quad (56)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱۴) می فهمیم که

$$N = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^{\beta\epsilon_F} x^{\frac{d}{2}-1} dx = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} (\beta\epsilon_F)^{\frac{d}{2}}. \quad (57)$$

حال با توجه به این که

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m}} \beta^{\frac{1}{2}} \quad (58)$$

بدست می آوریم

$$N = V \frac{(2\pi m)^{d/2}}{h^d} \frac{1}{\Gamma(d/2 + 1)} \epsilon_F^{d/2}. \quad (59)$$

و به این ترتیب انرژی فرمی برحسب چگالی ذرات بدست می آید:

$$\epsilon_F = \left(\frac{h^2}{2\pi m} \right) \left(\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) \right)^{\frac{2}{d}} n^{\frac{2}{d}}. \quad (60)$$

بنا براین با افزایش چگالی، انرژی فرمی نیز افزایش می یابد، اما چگونگی افزایش آن بستگی به بعد دارد. هم چنین بدست می آوریم:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(d/2 + 3)} (\beta\epsilon_F)^{d/2+1}. \quad (61)$$

پس از ساده کردن

$$PV = \frac{1}{\Gamma(d/2 + 3)} V \frac{(2\pi m)^{d/2}}{h^d} \epsilon_F^{d/2+1}. \quad (62)$$

بخصوص برای بعد $d = 2$ و بعد $d = 3$ بدست می آوریم:

$$d = 2 \quad \longrightarrow \quad \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (4\pi n), \quad (63)$$

$$d = 3 \quad \longrightarrow \quad \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (6\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}. \quad (64)$$

■ **تمرین:** نشان دهید که

$$PV = \frac{2}{d+2} N \epsilon_F, \quad (65)$$

و

$$U = \frac{d}{d+2} N \epsilon_F. \quad (66)$$

■ **تمرین:** بستگی انرژی فرمی، و سپس انرژی کل و فشار را بر حسب چگالی فقط با استفاده از آنالیز ابعادی بدست آورید.

■ **تمرین:** دمای فرمی را به صورت $T_F := \frac{\epsilon_F}{k}$ تعریف می کنیم. دمای فرمی را برای الکترون های درون یک فلز بدست آورید. هم چنین

سرعت الکترونیایی را که نزدیک سطح فرمی در حرکت اند مشخص کنید. طول موج گرمایی آنها را نیز حساب کنید. این طول موج گرمایی را با فاصله میانگین بین الکترون ها مقایسه کنید.

■ **تمرین:** دمای فرمی را برای نوترون های درون یک ستاره نوترونی بدست آورید.

۲.۵ تقریب های بالاتر

در این حد پارامتر z بزرگ است ولی بی نهایت نیست، بنابراین در بسط تابع های $f_n(z)$ بر حسب $\xi \equiv \ln z$ باید علاوه بر اولین جمله، جمله های دیگر را هم نگه داریم. وقتی که T صفر است، گاز فرمی کاملاً واگن خوانده می شود. در این دما $n\lambda^d$ بیشترین مقدار خود را دارد و تمام تراز های انرژی زیر سطح فرمی کاملاً پُر و تمام تراز های انرژی بالای سطح فرمی کاملاً خالی هستند. اکنون با افزایش دما، طول موج دوبروی ذرات و در نتیجه $n\lambda^d$ کوچک تر شده، ولی هنوز مقداری بزرگ و متناهی را اختیار می کند. تابع توزیع ذرات نیز به این واسطه هموار می شود. در این حد که z بسیار بزرگ است، دیگر نمی توانیم از بسط توابع $f_n(z)$ بر حسب توان های z استفاده کنیم ولی می توانیم آن را بر حسب $\ln(z)$ بسط دهیم. این بسط همان رابطه (۲۹) است، در ضمیمه این درس نحوه بدست آوردن آن شرح داده شده است. چند جمله اول تابع توزیع $f_n(\xi)$ به صورت زیر است:

$$f_n(\xi) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \xi^n \left[1 + n(n-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\xi^2} + \dots \right]. \quad (۶۷)$$

با استفاده از این بسط می توانیم خواص ترمودینامیکی گاز فرمیونی را در دماهای پایین یا چگالی های بالا مطالعه کنیم. برخلاف دماهای بالا یا چگالی های پایین، روابط ترمودینامیکی گاز در این رژیم نهایتاً بسطی بر حسب $n\lambda^d$ نخواهند بود، چرا که در این رژیم $n\lambda^d$ پارامتر بزرگی است. چنانکه خواهیم دید، در این محدوده، توابع ترمودینامیکی نهایتاً بر حسب $\frac{kT}{\epsilon_F}$ بسط داده خواهند شد که همان چیزی است که از نظر فیزیکی هم انتظارش را داریم. در واقع هرچه که kT نسبت به ϵ_F کوچکتر باشد، ما به رژیم کوانتومی نزدیک تر هستیم و آثار کوانتومی شدیدتر خواهند بود. پس از این مقدمه، به نحوه یافتن روابط ترمودینامیکی می پردازیم. برای مثال اولین رتبه را محاسبه می کنیم، به این معنا که در رابطه (۲۹) دومین جمله بسط را نیز در نظر می گیریم. بر اساس این روابط داریم:

$$n\lambda^d = \frac{1}{\Gamma(d/2+1)} \xi^{d/2} \left[1 + \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} - 1 \right) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\xi^2} + \dots \right] \quad (۶۸)$$

و

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(d/2+2)} \xi^{d/2+1} \left[1 + \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} + 1 \right) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\xi^2} + \dots \right] \quad (۶۹)$$

حال سوال این است که چگونه می بایست ξ را بین این معادلات حذف کرد. برای این کار از روش بازگشتی استفاده می کنیم. از رابطه (۴۴) می دانیم

$$n\lambda^d \Gamma(d/2+1) = \xi_0^{d/2}$$

که در آن $\xi_0 = \frac{\epsilon_F}{kT}$ است. بنابراین رابطه (۶۸) شکل کلی اش چنین است:

$$\xi_0^{d/2} = \xi^{d/2} (1 + \frac{a_1}{\xi^2} + \frac{a_2}{\xi^4} + \frac{a_3}{\xi^6} + \dots), \quad (۷۰)$$

که در آن a_i ها ضرایب بسطی هستند که در رابطه (۶۸) نوشته شده اند. این رابطه را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\xi_0 = \xi (1 + \frac{a_1}{\xi^2} + \frac{a_2}{\xi^4} + \frac{a_3}{\xi^6} + \dots)^{\frac{2}{d}} \quad (۷۱)$$

و با استفاده از بسط دو جمله ای یعنی

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{1}{2!}m(m-1)x^2 + \frac{1}{3!}m(m-1)(m-2)x^3 + \dots \quad (۷۲)$$

که برای m های کسری نیز برقرار است، می توانیم آن را به صورت زیر در آوریم:

$$\xi_0 = \xi (1 + \frac{a'_1}{\xi^2} + \frac{a'_2}{\xi^4} + \frac{a'_3}{\xi^6} + \dots) \quad (۷۳)$$

که در آن a'_i ها ضرایب جدیدی هستند که از ضرایب اولیه a_i و این بسط دو جمله ای بدست می آیند. حال این رابطه را می توانیم معکوس کنیم و بنویسیم:

$$\xi = \xi_0 (1 + \frac{b_1}{\xi_0^2} + \frac{b_2}{\xi_0^4} + \frac{b_3}{\xi_0^6} + \dots) \quad (۷۴)$$

که در آن b_i ها ضرایبی هستند که با استفاده از رابطه (۷۳) و مساوی قرار دادن توان های ξ_0 در دو طرف بدست می آیند. حال می توانیم ξ ای را که بدست آورده ایم در رابطه فشار یا انرژی یا هر تابع ترمودینامیکی دیگری نیز قرار دهیم. به این ترتیب همه روابط ترمودینامیکی به عنوان بسط هایی از $\frac{1}{\xi_0^2} = (\frac{kT}{\epsilon_F})^2$ تعیین می شوند.

■ **تمرین:** نشان دهید که در رتبه اول (بعد از رتبه صفرم) پتانسیل شیمیایی به شکل زیر است:

$$\mu = \epsilon_F (1 - \frac{(d-2)\pi^2}{12} (\frac{kT}{\epsilon_F})^2) \quad (۷۵)$$

در همین مرتبه تقریب، معادله حالت، انرژی، ظرفیت گرمایی ویژه و تراکم پذیری را نیز محاسبه کنید.

۶ گاز فرمی پارامغناطیسی

در این بخش گاز فرمی ایده آلی که از اتم های پارامغناطیسی تشکیل شده است را در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی مطالعه می کنیم. اتم های این گاز دارای گشتاور مغناطیسی دائمی هستند و به همین دلیل تحت تاثیر میدان مغناطیسی قرار می گیرند. اتم های چنین گازی علاوه بر درجات آزادی حرکتی، یک درجه آزادی اسپینی هم دارند. این گشتاور مغناطیسی باعث می شود که اتم های بیشتری در راستای میدان مغناطیسی قرار گیرند تا در خلاف جهت آن. از آنجا که هیچ نوع جفت شدگی ای بین درجات آزادی اسپینی و درجات آزادی حرکتی وجود ندارد، عملاً می توانیم این گاز را ترکیبی از دو گاز جداگانه در نظر بگیریم که در یکی از آنها اسپین ذرات در راستای میدان مغناطیسی و در دیگری اسپین ذرات در خلاف جهت میدان مغناطیسی است. (در این جا فرض کرده ایم که اتم ها اسپین $\frac{1}{2}$ دارند، یعنی اسپین آنها فقط دو حالت دارد). بنابراین تنها سوالی که پاسخ آن را باید پیدا کنیم این است که چه تعداد از اتم ها در حالت اسپین بالا و چه تعداد از آنها در حالت اسپین پایین قرار خواهند گرفت.. این تعداد بستگی به دما دارد و با محاسباتی شبیه به آنچه که برای گاز خنثی انجام دادیم پاسخ این سوال را نیز می توانیم پیدا کنیم. این کار را به شیوه ای روشمند در این بخش انجام می دهیم. نخست ترمودینامیک یک ماده مغناطیسی را، مستقل از نوع ماده، بررسی می کنیم.

۱۰.۶ ترمودینامیک یک ماده مغناطیسی

برای یک گاز مغناطیده کاری که محیط بیرونی روی گاز انجام می دهد برابر است با: $dW = -PdV + \mathcal{H}dM$ که در آن M مغناطش گاز یا ماده مغناطیده است. بنابراین برای گاز مغناطیده داریم

$$dU = TdS - PdV + \mathcal{H}dM. \quad (۷۶)$$

دقت کنید که اگرچه انرژی داخلی و میکروسکوپی یک ذره با ممان مغناطیسی m در یک میدان مغناطیسی $\mathcal{H}$ برابر است با $-m\mathcal{H}$ ، اما در قانون اول ترمودینامیک، کار را بر اساس آنچه که عامل خارجی (در این جا میدان مغناطیسی) روی سیستم انجام می دهد تعریف می کنیم. به عبارت دیگر میدان مغناطیسی برای ایجاد مغناطش dM در ماده کار مثبت $\mathcal{H}dM$ را انجام می دهد. دلیل عمیق اش این است که مغناطش ایجاد شده در ماده، از طریق قانون القای فاراده، میدانی ایجاد می کند که با افزایش بیشتر مغناطش مخالفت می کند و میدان مغناطیسی خارجی کار انجام می دهد تا بر این مقاومت غلبه کند.

■ **یک توضیح در باره تفاوت دو میدان مغناطیسی:** در ساختار نظری ترمودینامیک، همه متغیرهای ماکروسکوپی به صورت زوج های مزدوج در نظر گرفته می شوند مثل (P, V) یا (T, S) یا (μ, N) ، که یکی از آنها فزونور و دیگری نافزونور است. برای ماده مغناطیسی نیز متغیرهای مزدوج عبارت اند از $(\mathcal{H}, M)$ که در آن $\mathcal{H}$ میدان مغناطیسی خارجی و M مغناطش کل است. باید دقت کنیم که $\mathcal{H}$ با میدان

مغناطیسی برآیند، یعنی B ، که درون ماده مغناطیسی پدیدار می شود فرق دارد. رابطه این دو به صورت زیر است:

$$B = \mu_0(\mathcal{H} + M). \quad (77)$$

که در آن μ_0 ثابت نفوذپذیری خلاء است. واضح است که B نه فزونور است و نه نافزونور.

■ **حل یک معمای دامنه دار:** وقتی که با سیستم های مغناطیسی سروکار داریم، یکی از نکات مبهمی که باعث دردسر زیادی در فهمیدن ترمودینامیک این سیستم ها در کتابهای ترمودینامیک می شود، مربوط به تعریف پتانسیل هلمهولتز یا انرژی آزاد در ماده مغناطیسی است. چنانکه شرح خواهیم داد، یک تفاوت عمده بین تابع انرژی آزاد F چنانکه در ترمودینامیک دیده ایم، با آنچه که با همین نام در مکانیک آماری از آن استفاده می کنیم وجود دارد و تقریباً در همه موارد از یک نماد برای این دو مفهوم استفاده می شود که باعث دردسر فوق می شود. باید دقت کنیم که چنین ابهامی در مورد سیستم های غیرمغناطیسی وجود ندارد. بنابراین برای پرهیز از این ابهام ما از دو نوع نماد متفاوت برای این دو تابع استفاده می کنیم. در زیر متغیرهای درون هر کدام از این توابع به وضوح نوشته شده اند. از آنجا که در این سیستم ها تعداد ذرات معمولاً ثابت است، تعداد ذرات را به عنوان متغیر ترمودینامیکی در نظر نمی گیریم.

■ **انرژی آزاد در ترمودینامیک:** $F = F(T, V, M)$

$$F = U - TS, \quad dF = -SdT - PdV + \mathcal{H}dM, \quad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,M} \quad (78)$$

■ **انرژی آزاد در آنزامل کانونیک:** $F_{stat} = F_{stat}(T, V, \mathcal{H})$

$$F_{stat} = -kT \ln Z, \quad dF_{stat} = -SdT - PdV - M d\mathcal{H}, \quad P = -\left(\frac{\partial F_{stat}}{\partial V}\right)_{T,\mathcal{H}}. \quad (79)$$

رابطه این دو نوع انرژی آزاد یک تبدیل لژاندر است:

$$F_{stat} = F - \mathcal{H}M. \quad (80)$$

هم چنین تنها برای تابع انرژی آزاد F_{stat} رابطه زیر برقرار است:

$$F_{stat} = PV, \quad (81)$$

که در نتیجه آن

$$P = -\left(\frac{\partial F_{stat}}{\partial V}\right)_{T,\mathcal{H}} = -\frac{F_{stat}}{V} = \frac{kT \ln Z}{V} \quad (82)$$

یا

$$\frac{PV}{kT} = \ln Z. \quad (۸۳)$$

همین ابهام وقتی که از آنزامل گرانداکانونیک استفاده می کنیم نیز وجود دارد. در اینجا به جای F با یک پتانسیل دیگر سروکار داریم که آن را پتانسیل بزرگ یا پتانسیل لاندائو^۳ می نامیم. در مورد این پتانسیل نیز مشابه روابط (۷۸) نیز وجود دارد:

■ پتانسیل بزرگ در ترمودینامیک: $\Omega = \Omega(T, V, M, \mu)$

$$\Omega = F - N\mu, \quad d\Omega = -SdT - PdV + \mathcal{H}dM - Nd\mu, \quad P = -\left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_{T,M} \quad (۸۴)$$

■ پتانسیل بزرگ در آنزامل گرانداکانونیک: $\Omega_{stat} = \Omega_{stat}(T, V, \mathcal{H}, \mu)$

$$\Omega_{stat} = -kT \ln Q, \quad d\Omega_{stat} = -SdT - PdV - Md\mathcal{H} - Nd\mu, \quad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,\mathcal{H}} \quad (۸۵)$$

رابطه بین این دو تابع پتانسیل نیز یک تبدیل لژاندر است:

$$\Omega_{stat} = \Omega - \mathcal{H}M. \quad (۸۶)$$

در اینجا هم تنها برای پتانسیل بزرگ در آنزامل گرانداکانونیک یعنی Ω_{stat} رابطه زیر برقرار است:

$$\Omega_{stat} = -PV, \quad (۸۷)$$

که در نتیجه آن

$$P = -\left(\frac{\partial \Omega_{stat}}{\partial V}\right)_{T,\mathcal{H}} = -\frac{\Omega_{stat}}{V} = \frac{kT \ln Q}{V} \quad (۸۸)$$

یا

$$\frac{PV}{kT} = \ln Q. \quad (۸۹)$$

^۳Grand Potential or Landau Potential

■ رفع ابهام:

حال این ابهام را رفع می کنیم. نخست به تفاوت $F(T, V, M)$ و $F_{stat}(T, V, \mathcal{H})$ توجه می کنیم که به آزمابل کانونیک مربوط است. استدلال در مورد آزمابل گراند کانونیک کاملاً مشابه است و خواننده می تواند آن را براحتی تکرار کند. این ابهام از این جا سرچشمه می گیرد که قانون اول ترمودینامیک به درستی به صورت زیر نوشته می شود:

$$dU = TdS - PdV + \mathcal{H}dM \quad (90)$$

که معنایش این است که U تابعی از متغیرهای فزونور یک سیستم مغناطیسی است.

$$U = U(S, V, M) \quad (91)$$

با تبدیل لژاندر نسبت به S پتانسیل هلمهولتز نیز می بایست همچنان تابعی از متغیر فزونور M باقی بماند، حال آنکه در تمام روابطی که تاکنون درباره ماده مغناطیسی نوشته ایم F را تابعی از $\mathcal{H}$ گرفته ایم. اما می دانیم که نوشتن متغیرهای مستقل در توابع ترمودینامیکی اهمیت فراوان دارد و نمی توان با آنها به صورت دلبخواهی رفتار کرد: اگر متغیرها را اشتباه در نظر بگیریم به نتایج اشتباه خواهیم رسید. سوال این است که بالاخره F را تابع کدام متغیرها باید در نظر گرفت؟ در ترمودینامیک رابطه صحیح $P = -(\frac{\partial F}{\partial V})_{T, M}$ است، نه رابطه $P = -(\frac{\partial F}{\partial V})_{T, \mathcal{H}}$. پاسخ این معما این است که در این دو رابطه ما با دو نوع تابع F سروکار داریم در حالی که معمولاً به اشتباه از یک نماد برای اشاره به آنها استفاده می شود. اما همانطور که در ابتدا توضیح دادیم باید بین آنها به وضوح فرق گذاشت و از دو نماد متفاوت برای آنها استفاده کرد. حال منشاء این تفاوت را توضیح می دهیم. تابع انرژی آزاد یا همان پتانسیل هلمهولتز، یعنی F در ترمودینامیک به صورت $F = F(T, V, M)$ نوشته می شود. در مکانیک آماری انرژی های میکروسکوپی ای را که روی آنها جمع می کنیم نمی توانیم به صورت توابعی از مغناطش کل بنویسیم، چون هنوز مغناطش کل اصلاً تعیین نشده است. مغناطش کل، که در واقع متوسط مغناطش کل روی همه افت و خیزهای گرمایی است، تنها پس از محاسبه کامل تابع پارش تعیین می شود. بنابراین ما فقط می توانیم انرژی های میکروسکوپی را به صورت تابعی از میدان مغناطیسی خارجی یعنی $\mathcal{H}$ بنویسیم. به عبارت دیگر تابع پارش کانونیک به صورت زیر است:

$$Z(T, V, \mathcal{H}, N) = \sum_i e^{-\beta((H_0(i) - \mathcal{H}M(i)))} \quad (92)$$

که در این جا $H_0(i)$ نشان دهنده انرژی میکرواحالت i ام در نبود میدان مغناطیسی، و $M(i)$ نشان دهنده متغیرهای میکروسکوپی نشان دهنده مغناطش (و نه مغناطش ترمودینامیکی کل) در میکرواحالت i ام هستند. مثلاً $M(i)$ نشان دهنده مجموع ممان های مغناطیسی همه ذرات در یک میکرواحالت i است. بنابراین آن چیزی که با محاسبه تابع پارش بدست می آوریم، همان پتانسیل آزاد ترمودینامیکی نیست. به همین دلیل آن را با

F_{stat} نشان می دهیم:

$$F_{stat}(T, V, \mathcal{H}) = -kT \ln Z(T, V, \mathcal{H}) \quad (93)$$

که طبیعتاً تابعی از $(T, V, \mathcal{H})$ است نه تابعی از (T, V, M) . از آنجا که تابع پارش را به صورت (۹۲) نوشته ایم، این تابع چیزی نیست جز تبدیل لژاندر تابع هلمهولتز نسبت به M یعنی

$$F_{stat}(T, V, \mathcal{H}) = F(T, V, M) - \mathcal{H}M. \quad (94)$$

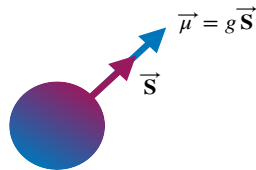
به همین دلیل است که F_{stat} تابعی است از $\mathcal{H}$ و نه M . عین همین استدلال را می توان برای آنزامل گراندکانونیک نیز تکرار کرد. نقطه شروع اش عبارت تابع پارش گراند کانونیک است، یعنی

$$Q(T, V, \mathcal{H}, \mu) = \sum_i e^{-\beta((H_0(i) - \mu N(i) - \mathcal{H}M(i)))} \quad (95)$$

و تکرار یکسان همه روابط بعدی با تغییرات اندک.

۷ میکرو حالت های یک گاز پارامغناطیس

شکل (۵) به طور شماتیک یک اتم از یک گاز پارامغناطیسی را نشان می دهد. اتم های این گاز دارای اسپین هستند که آن را با بردار $\vec{S}$ نشان داده ایم. گشتاور مغناطیسی این اتم، یعنی $\vec{\mu}$ متناسب با اسپین آن است.



شکل ۵: ممان مغناطیسی یک ذره با اسپین آن هم جهت و ضریبی از آن است. این ضریب را نسبت ژیرومغناطیسی می نامند.

ضریب تناسب را با g نشان می دهیم. این ضریب تناسب بستگی به جرم اتم و بار الکتریکی آن و ساختار درونی آن دارد و نسبت ژیرومغناطیسی^۴ خوانده می شود. دیمانسیون آن از نوع $\frac{e}{m}$ است که در آن e بار الکتریکی و m جرم است. در مکانیک کوانتومی $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ یک عملگر

^۴gyromagnetic ratio

برداری سه مولفه ای است. این عملگر ها با هم جابجا نمی شوند بلکه رابطه جابجایی زیر را دارند:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y.$$

و حالت های یک ذره تنها با ویژه مقدارهای دو عملگر جابجا شونده مثل S_z و $S^2 := S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ مشخص می شوند. این حالت ها را با $|s, s_z\rangle$ نشان می دهیم که برای دو عملگر جابجا شونده ی بالا ویژه مقدارهای زیر را دارند:

$$S^2|s, s_z\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s, s_z\rangle, \quad S_z|s, s_z\rangle = \hbar s_z|s, s_z\rangle. \quad (96)$$

می توان نشان داد که s تنها می تواند مقادیر گسسته ای مثل $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ را اختیار کند و به ازای هر مقدار s ، s_z مقادیر $s-1, s, -s+1, \dots, -s$ را اختیار می کند. برای ذره بدون اسپین $s=0$ و برای ذره اسپین یک دوم $s=\frac{1}{2}$ است و الی آخر. به این ترتیب $\hbar^2 s(s+1)$ اندازه کل اسپین و $\hbar s_z$ اندازه سوم آن است. برای ذره اسپین یک دوم نمادهای ساده تر زیر را به کار می بریم:

$$|+\rangle \equiv |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad |-\rangle \equiv |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \quad (97)$$

شکل صریح عملگرها در پایه ی بالا چنین است:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z, \quad (98)$$

که در آن $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ماتریس های پائولی هستند:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

و

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

فرض ما این است که اسپین اتم های گاز برابر با $\frac{1}{2}$ است. اما محاسباتی که انجام می دهیم به راحتی برای اسپین های بالاتر نیز با کمی تغییر انجام می شوند. هامیلتونی چنین گاز ایده آلی به صورت زیر است

$$\hat{H} = \sum_i \hat{h}_i \quad (99)$$

که در آن $\hat{h}_i$ هامیلتونی یکی از اتم ها در حضور میدان مغناطیسی است و به شکل زیر است:

$$\hat{h} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} - g\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} - \frac{g\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} - \gamma\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (۱۰۰)$$

که در آن γ نماد خلاصه زیر است:

$$\gamma := \frac{g\hbar}{2}.$$

هرگاه میدان مغناطیسی در جهت z باشد، خواهیم داشت:

$$\hat{h} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} - \gamma B\sigma_z. \quad (۱۰۱)$$

این هامیلتونی به شکل دقیق تر چنین است:

$$\hat{h} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} \otimes I_s - \gamma B I_c \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} \frac{\hat{P}^2}{2m} - \gamma B & 0 \\ 0 & \frac{\hat{P}^2}{2m} + \gamma B \end{pmatrix}. \quad (۱۰۲)$$

ویژه حالت های انرژی این هامیلتونی تک ذره ای عبارت اند از

$$|\psi_{\mathbf{k}}, +\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{k}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\psi_{\mathbf{k}}, -\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad (۱۰۳)$$

که اولی نشان دهنده حالتی است که ذره دارای اعداد کوانتومی حرکتی $\mathbf{k}$ و اسپین رو به بالاست ، و دومی نشان دهنده حالتی است که ذره دارای همان اعداد کوانتومی حرکتی ولی با اسپین رو به پایین است. در غیاب میدان مغناطیسی این دو حالت یک انرژی دارند. اما در حضور یک میدان مغناطیسی این دو تراز از هم جدا می شوند و میزان جدایی آنها در انرژی بستگی به شدت میدان مغناطیسی دارد:

$$\hat{h} \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{k}} \\ 0 \end{pmatrix} = (\epsilon_{\mathbf{k}} - \gamma B) \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{k}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۱۰۴)$$

$$\hat{h} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = (\epsilon_{\mathbf{k}} + \gamma B) \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}. \quad (۱۰۵)$$

در این دو عبارت

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$$

انرژی جنبشی و $\pm\gamma B$ انرژی برهم کنش با میدان مغناطیسی است. میکرواحالت های این سیستم چنین اند:

$$|n_{\mathbf{k}_1}^+, n_{\mathbf{k}_2}^+, n_{\mathbf{k}_3}^+, \dots, n_{\mathbf{k}_1}^-, n_{\mathbf{k}_2}^-, n_{\mathbf{k}_3}^-, \dots\rangle \quad (106)$$

که در آن n_k^+ تعداد ذراتی است که در تراز $|\psi_{\mathbf{k}}, +\rangle$ هستند و n_k^- تعداد ذراتی است که در تراز $|\psi_{\mathbf{k}}, -\rangle$ هستند. اگر اتم ها دارای اسپین s باشند، آنگاه حالت های یک اتم را با

$$|s, s_z\rangle \quad s_z = -s, -s+1, \dots, s-1, s. \quad (107)$$

نشان می دهیم و میکرواحالت های گاز هم به تبع آن تغییر خواهند کرد. فعلا خود را به اسپین یک دوم محدود می کنیم. برای چنین گازی اگر تعداد ذرات با اسپین بالا را با N^+ و تعداد ذرات با اسپین پایین را با N^- نشان دهیم، آنگاه مغناطش کل گاز برابر خواهد بود با:

$$M = \gamma(N^+ - N^-) = \frac{g\hbar}{2}(N^+ - N^-). \quad (108)$$

۱.۷ محاسبه تابع پارش یک گاز پارامغناطیس

اگر برای سادگی نمادهای $1, 2, 3, \dots$ را به جای $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \dots$ به کار ببریم، انرژی یک میکرواحالت برابر است با:

$$E = n_1^+(\epsilon_1 - \gamma B) + n_2^+(\epsilon_2 - \gamma B) + \dots + n_1^-(\epsilon_1 + \gamma B) + n_2^-(\epsilon_2 + \gamma B) + \dots \quad (109)$$

یا به طور فشرده:

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} [n_i^+(\epsilon_i - \gamma B) + n_i^-(\epsilon_i + \gamma B)]. \quad (110)$$

در نتیجه تابع پارش گراند کانونیک به صورت زیر خواهد بود:

$$Q(\mu, V, T) = \sum_{\{n_i^+, n_i^-\}} e^{-\beta[\sum_{i=1}^{\infty} n_i^+(\epsilon_i - \gamma B) + n_i^-(\epsilon_i + \gamma B)] + \beta\mu \sum_i (n_i^+ + n_i^-)} \quad (111)$$

با تعریف $z = e^{\beta\mu}$ خواهیم داشت:

$$Q = \prod_i \left(\sum_{n_i^+=0,1} z^{n_i^+} e^{-\beta((\epsilon_i - \gamma B)n_i^+)} \right) \prod_i \left(\sum_{n_i^-=0,1} z^{n_i^-} e^{-\beta((\epsilon_i + \gamma B)n_i^-)} \right) \quad (112)$$

با محاسبه جمع های ساده ای که در داخل پرانتزها وجود دارد، تابع پارش گراند کانونیک برابر می شود با:

$$\mathcal{Q} = \prod_i \left[1 + ze^{-\beta(\epsilon_i - \gamma B)} \right] \prod_i \left[1 + ze^{-\beta(\epsilon_i + \gamma B)} \right] \quad (113)$$

اما آنچه که به آن احتیاج داریم، لگاریتم تابع پارش گراند کانونیک است که برابر است با:

$$\ln \mathcal{Q} = \sum_i \ln(1 + ze^{-\beta(\epsilon_i - \gamma B)}) + \sum_i \ln(1 + ze^{-\beta(\epsilon_i + \gamma B)}) \quad (114)$$

یا

$$\ln \mathcal{Q}(\mu, V, T) = \ln \mathcal{Q}^+(\mu, V, T) + \ln \mathcal{Q}^-(\mu, V, T). \quad (115)$$

حال می توانیم به همان شیوه ای که در مورد گاز غیر مغناطیسی انجام دادیم، جمع ها را به انتگرال تبدیل کنیم. اما کار ساده تر (و برای اینکه همچنان فقط با یک نوع تابع f_n سروکار داشته باشیم) این است که عبارت (114) را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\ln \mathcal{Q}(z, V, T) = \sum_i \ln(1 + z^+ e^{-\beta \epsilon_i}) + \sum_i \ln(1 + z^- e^{-\beta \epsilon_i}) \quad (116)$$

که در آن

$$z^+ = ze^{\beta \gamma B}, \quad z^- = ze^{-\beta \gamma B}. \quad (117)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{PV}{kT} = \ln \mathcal{Q} = \frac{V}{\lambda^d} [f_{\frac{d}{2}+1}(z^+) + f_{\frac{d}{2}+1}(z^-)] \quad (118)$$

همچنین، از آنجا که $N = z \frac{\partial \ln \mathcal{Q}}{\partial z}$ و با توجه به اینکه $z \frac{\partial f_n(z)}{\partial z} = f_{n-1}(z)$ و توجه به این نکته که

$$z \frac{\partial}{\partial z} = z^+ \frac{\partial}{\partial z^+} = z^- \frac{\partial}{\partial z^-}$$

به دست می آوریم:

$$N(z, V, T) = N(z^+, V, T) + N(z^-, V, T) = \frac{V}{\lambda^d} [f_{\frac{d}{2}}(z^+) + f_{\frac{d}{2}}(z^-)]. \quad (119)$$

در این رابطه N^+ و N^- به ترتیب متوسط تعداد ذرات با اسپین بالا و تعداد ذرات با اسپین پایین هستند.

■ **محاسبه انرژی:** از نظر شهودی به نظر می رسد که انرژی گاز باید مجموع انرژی جنبشی و انرژی مغناطیسی باشد. بنابراین انتظار داریم که رابطه زیر برقرار باشد:

$$U = \frac{d}{2}PV - MB. \quad (120)$$

بیا این رابطه را ثابت کنیم. به یک نکته باید توجه کنیم و آن اینکه ما همواره متغیرهای مستقل خود را z و β گرفته ایم. در گاز فرمیونی غیرمغناطیسی توابع $f_n(z)$ بستگی به β نداشتند و بنابراین نیازی به محاسبه مشتق آنها نبود. اما حالا توابع $f_n(z^\pm)$ به β نیز بستگی دارند. بنابراین در محاسبه انرژی باید به این نکته توجه کنیم. از رابطه (۱۱۶) می توانیم بنویسیم:

$$U = -\frac{\partial \ln Q(z, V, T)}{\partial \beta} = \frac{d}{2}kT \frac{V}{\lambda^d} (f_{d/2+1}(z^+) + f_{d/2+1}(z^-)) - \frac{V}{\lambda^d} \left(\frac{\partial f_{d/2+1}(z^+)}{\partial z^+} \frac{\partial z^+}{\partial \beta} + \frac{\partial f_{d/2+1}(z^-)}{\partial z^-} \frac{\partial z^-}{\partial \beta} \right). \quad (121)$$

سطر اول عبارت بالا ناشی از محاسبه مشتق $\frac{V}{\lambda^d}$ نسبت به β است و سطر دوم آن ناشی از مشتق $f_{d/2+1}(z^\pm)$ ها نسبت به β است. دقت کنید که ما در همه مراحل متغیرهای مستقل را z و β گرفته ایم. بنابراین داریم:

$$\frac{\partial z^+}{\partial \beta} = \frac{\partial (ze^{\beta\gamma B})}{\partial \beta} = \gamma B z^+, \quad \frac{\partial z^-}{\partial \beta} = \frac{\partial (ze^{-\beta\gamma B})}{\partial \beta} = -\gamma B z^-. \quad (122)$$

در نتیجه از رابطه (۱۲۱) خواهیم داشت:

$$U = \frac{d}{2}kT \frac{V}{\lambda^d} (f_{d/2+1}(z^+) + f_{d/2+1}(z^-)) - \frac{V}{\lambda^d} \left(\frac{\partial f_{d/2+1}(z^+)}{\partial z^+} z^+ \gamma B - \frac{\partial f_{d/2+1}(z^-)}{\partial z^-} z^- \gamma B \right) \quad (123)$$

و سپس با استفاده از رابطه $z \frac{\partial f_{n+1}(z)}{\partial z} = f_n(z)$ و (۱۱۹) به نتیجه نهایی زیر می‌رسیم:

$$U = \frac{d}{2} kT \frac{V}{\lambda^d} \left(f_{d/2+1}(z^+) + f_{d/2+1}(z^-) \right) - \gamma(N^+ - N^-)B = \frac{d}{2} PV - MB. \quad (124)$$

به این ترتیب یک بار دیگر و با استفاده از آزمایش گرانداکانونیک درستی رابطه $U = \frac{d}{2} PV - MB$ را برای گاز پارامغناطیسی ثابت کرده ایم.

حال با در دست داشتن روابط اساسی (۱۱۸) و (۱۱۹) می‌توانیم مکانیک آماری این گاز را به طور دقیق مطالعه کنیم. راهش این است که به صورت اختلالی پارامتر z را بین این دو رابطه حذف کنیم، به همان صورتی که در مورد گاز خنثی این کار را می‌کردیم. در حالت های خاصی می‌توانیم این ترکیب را به شکل ساده تری انجام دهیم.

■ حد کاملاً کلاسیک: $z \ll 1$.

در این حد آثار کوانتومی دیده نمی‌شوند. به دلیل آنکه در حد $z \ll 1$ رفتار حدی توابع به صورت $f_n(z) \approx z$ است، که قبلاً با آنها آشنا شده ایم داریم:

$$\begin{aligned} N &= N^+ + N^- = \frac{V}{\lambda^d} z^+ + \frac{V}{\lambda^d} z^- \\ &= \frac{V}{\lambda^d} (z^+ + z^-) = \frac{V}{\lambda^d} z (e^{\beta\gamma B} + e^{-\beta\gamma B}) \\ &= \frac{V}{\lambda^d} 2z \cosh \beta\gamma B. \end{aligned} \quad (125)$$

به همین ترتیب بدست می‌آوریم:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} (z^+ + z^-) = \frac{V}{\lambda^d} 2z \cosh \beta\gamma B \quad (126)$$

با تقسیم این دو رابطه بر هم به معادله حالت گاز می‌رسیم:

$$PV = NkT, \quad (127)$$

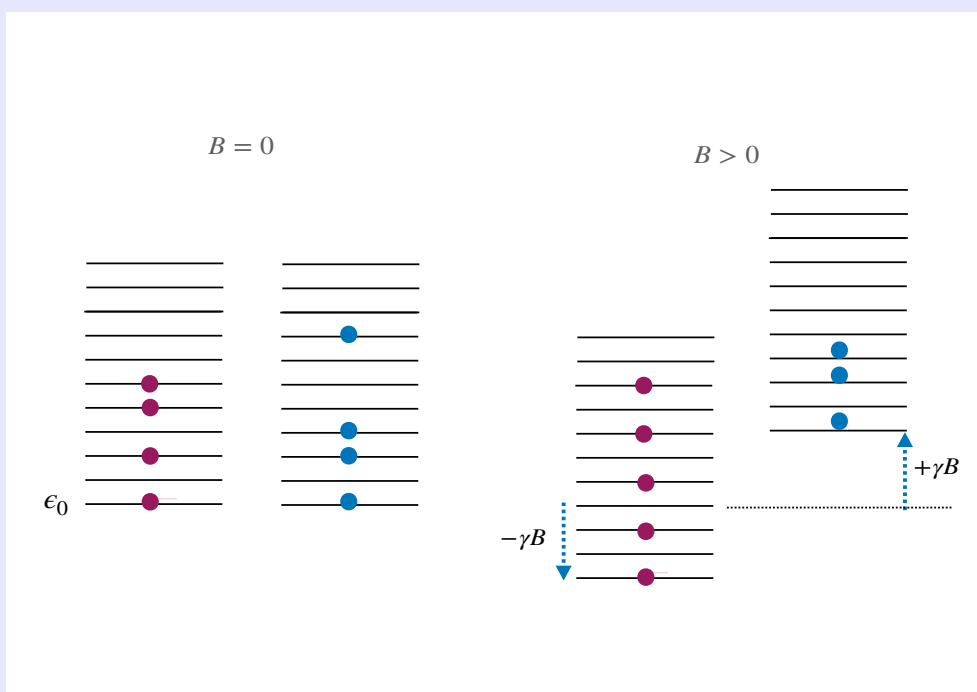
که همان معادله حالت گاز ایده آل است. به این ترتیب می‌بینیم که مغناطیسی بودن گاز در این حد، یعنی حد کلاسیک، تاثیری در معادله حالت ندارد. از خود می‌پرسیم پس تاثیر مغناطیسی بودن گاز در کجاست؟ یا می‌توانیم از خود بپرسیم که این گاز پارامغناطیسی اکنون که در میدان مغناطیسی قرار گرفته مغناطش کلی اش، که آن را با M نشان می‌دهیم، چقدر است؟ برای پاسخ به این سوال، کافی است توجه کنیم که مغناطش کلی برابر است با:

$$M = \gamma(N^+ - N^-) = \gamma\left(\frac{V}{\lambda^d} z^+ - \frac{V}{\lambda^d} z^-\right) = \gamma \frac{V}{\lambda^d} z (e^{\beta\gamma B} - e^{-\beta\gamma B}) = \gamma \frac{V}{\lambda^d} 2z \sinh \beta\gamma B \quad (۱۲۸)$$

اما با توجه به این که $N = \frac{V}{\lambda^d} 2z \cosh \beta\gamma B$ مقدار مغناطش برابر می شود با:

$$M = \gamma N \tanh \beta\gamma B, \quad (۱۲۹)$$

که همان چیزی است که از نظر شهودی نیز انتظار داریم.



شکل ۶: شکل سمت چپ: وقتی که میدان مغناطیسی صفر است، اتم های با اسپین بالا و پایین هر دو یک انرژی دارند. بنابراین در هر حالت با اعداد کوانتومی n دو ذره جای می گیرند. شکل سمت راست: در حضور یک میدان مغناطیسی، لایه های انرژی ذرات اسپین بالا به اندازه $-\gamma B$ رو به پایین و لایه های انرژی ذرات اسپین پایین به همان اندازه رو به بالا منتقل می شوند. طبیعتاً در یک دمای دلخواه، لایه های با اسپین بالا بیشتر اشغال می شوند.

■ **حد کاملاً واگن یا حد کاملاً کوانتومی:** در این حد $z \rightarrow \infty$. بنابراین توابع را بر حسب $\xi = \ln z$ بسط می دهیم. می دانیم که در

حد $\xi \rightarrow \infty$ داریم $f_n(\xi) \approx \frac{\xi^n}{\Gamma(n+1)}$. از آنجا که در دمای صفر، هم z^+ و هم z^- بسیار بزرگ می شوند، می نویسیم:

$$\frac{P+V}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{\xi^{d/2+1}}{\Gamma(d/2+2)}, \quad \frac{P-V}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{\xi^{-d/2+1}}{\Gamma(d/2+2)}, \quad (130)$$

که در آن

$$\xi^+ = \ln z^+ = \ln z + \beta\gamma B, \quad \xi^- = \ln z^- = \ln z - \beta\gamma B. \quad (131)$$

با توجه به این که در حد کاملاً واگن، طبق تعریف پتانسیل شیمیایی انرژی فرمی است، یعنی $\epsilon_F(T=0) = \mu$ ، رابطه بالا را به صورت

زیر می نویسیم و در روابط آینده، همه جا ξ را با $\beta\epsilon_F$ نشان می دهیم. از رابطه (۱۱۹) داریم

$$N^+ = \frac{V}{\lambda^d} \frac{\xi^{d/2+1}}{\Gamma(d/2+2)}, \quad N^- = \frac{V}{\lambda^d} \frac{\xi^{-d/2+1}}{\Gamma(d/2+2)}. \quad (132)$$

به کمک این رابطه و رابطه (۱۳۰) می توانیم $\xi = \beta\epsilon_F$ را بدست آورده و در رابطه (۱۳۰) قرار دهیم تا معادله حالت بدست آید. از

رابطه (۱۳۲) و با داشتن چگالی ذرات می توانیم بنویسیم:

$$N \equiv N^+ + N^- = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(d/2+1)} \left[(\beta\epsilon_F + \beta\gamma B)^{d/2} + (\beta\epsilon_F - \beta\gamma B)^{d/2} \right]. \quad (133)$$

حال برای سادگی محاسبات فرض می کنیم که گاز فرمیونی در **دو بعد** قرار دارد. در این صورت خواهیم داشت:

$$N = \frac{V}{\lambda^2} (\beta\epsilon_F + \beta\gamma B) + \frac{V}{\lambda^2} (\beta\epsilon_F - \beta\gamma B) = 2 \frac{V}{\lambda^2} \beta\epsilon_F \quad (134)$$

و در نتیجه

$$\beta\epsilon_F = \lambda^2 n = \lambda^2 \frac{N}{V}. \quad (135)$$

البته به یاد داریم که در اینجا V به معنای سطح ای (نه حجم ای) است که گاز فرمی اشغال کرده است. ولی ما همچنان از نماد V برای

نشان دادن این سطح استفاده می کنیم. با قرار دادن این مقدار $\xi = \beta\epsilon_F$ در رابطه (۱۳۰) خواهیم داشت

$$\frac{PV}{kT} = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{\lambda^2} (\lambda^2 n + \beta\gamma B)^2 + \frac{V}{\lambda^2} (\lambda^2 n - \beta\gamma B)^2 \right) \quad (136)$$

و پس از ساده کردن رابطه ها

$$P = \frac{h^2}{2\pi m} \frac{N^2}{V^2} + \frac{2\pi m}{h^2} \gamma^2 B^2. \quad (137)$$

با توجه به این که $\gamma = \frac{g\hbar}{2}$ است، فشار به صورت زیر در می آید:

$$P = \frac{h^2}{2\pi m} \frac{N^2}{V^2} + \frac{mg^2}{8\pi} B^2. \quad (138)$$

می توان این فشار را به صورت زیر نوشت:

$$P = P_{kinetic} + P_{magnetic} \quad (139)$$

که در آن جمله اول فشار جنبشی گاز و جمله دوم فشار مغناطیسی گاز است. فشار مغناطیسی ناشی از این است که هر چه میدان مغناطیسی بزرگ تر باشد، اختلاف انرژی اسپین های بالا و پایین بیشتر شده و تراز های انرژی اسپین پایین بیشتر به سمت بالا میل می کنند. این ترازهای انرژی بالاتر به معنای تکانه بیشتر ذرات و در نتیجه فشار بیشتر آنها نیز می شود. اما چرا این فشار با توان دوم از میدان مغناطیسی متناسب است؟ دلیل اش این است که انرژی متناسب است با MB که در آن M متوسط مغناطش است و هر چه میدان مغناطیسی قویتر باشد، M نیز بزرگ تر می شود.

یک کمیت جالب تفاوت تعداد ذرات اسپین بالا و اسپین پایین است که در واقع متناسب با مغناطش کل است. در بعد دلخواه این تفاوت برابر است با:

$$N^+ - N^- = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(d/2 + 1)} [(\beta\epsilon_F + \beta\gamma B)^{d/2} - (\beta\epsilon_F - \beta\gamma B)^{d/2}]. \quad (140)$$

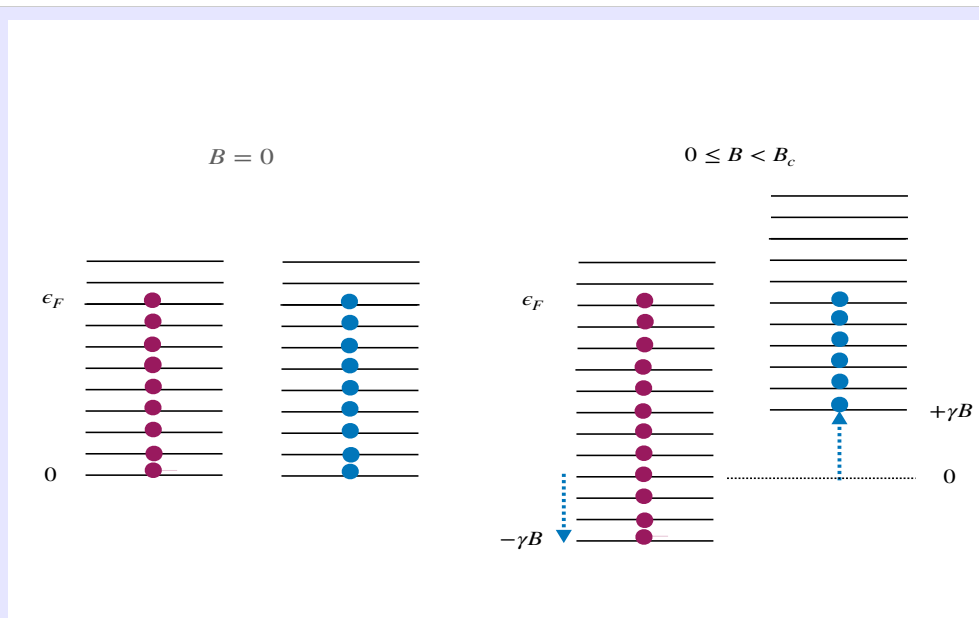
در بعد ۲ این رابطه به شکل ساده زیر در می آید:

$$N^+ - N^- = \frac{V}{\lambda^2} 2\beta\gamma B = \frac{4\pi m}{h^2} V\gamma B. \quad (141)$$

حال از خود می پرسیم که چه موقع N^- برابر با صفر می شود و همه ذرات در حالت اسپین بالا قرار می گیرند؟ از رابطه بالا می فهمیم که این اتفاق وقتی می افتد که میدان مغناطیسی از یک مقدار بحرانی بیشتر شود.

مقدار این میدان از رابطه بالا پیدا می شود و برابر است با:

$$\gamma B_c = \frac{h^2}{4\pi m} \frac{N}{V}. \quad (142)$$



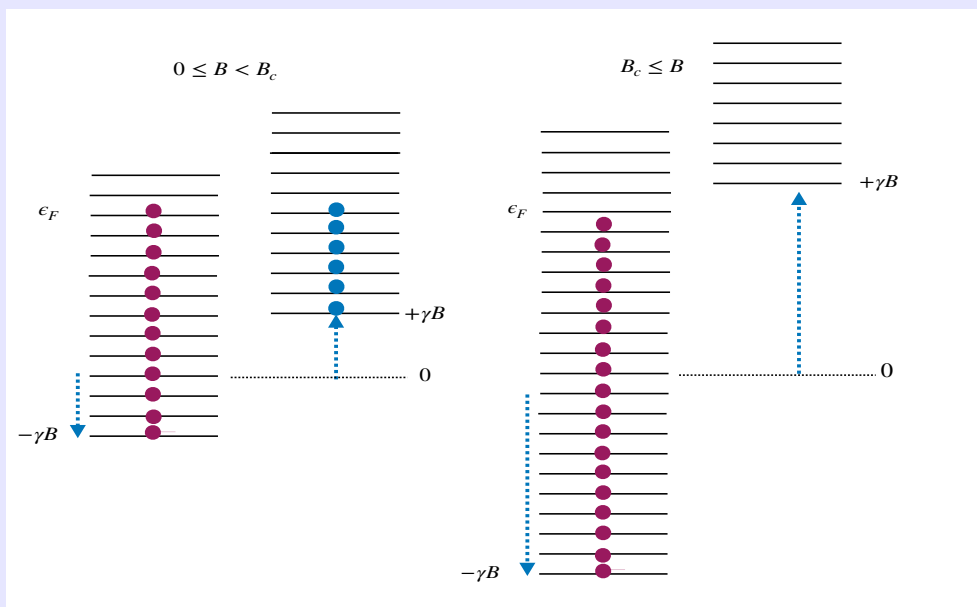
شکل ۷: طرح تراکم ذرات در لایه های انرژی در دمای صفر. شکل سمت چپ: وقتی که میدان مغناطیسی صفر است. شکل سمت راست: وقتی که میدان مغناطیسی بزرگ تر از صفر ولی کوچک تر از یک مقدار بحرانی است. تحت این شرایط هنوز لایه هایی با اسپین بالا و پایین وجود دارند که انرژی شان مساوی است.

تفسیر فیزیکی این نتیجه چیست؟ با توجه به شکل (۸) تفسیر آن معلوم است. وقتی که داشته باشیم

$$2\gamma B \geq \epsilon_F$$

پایین ترین سطح انرژی ذرات با اسپین پایین، از بالاترین سطح انرژی ذرات با اسپین بالا بیشتر است، بنابراین مقدار کمینه انرژی در دمای صفر وقتی حاصل می شود که همه ذرات در سطوح انرژی با اسپین بالا جمع شوند، یعنی هیچ ذره ای به سطوح انرژی با اسپین پایین نمی رود که به معنای این است که N_- برابر با صفر است.

با ترکیب دو رابطه (۱۱۸) و (۱۱۹) می توان معادله حالت گاز فرمی پارامغناطیسی را در شرایط دیگر هم بدست آورد. طبیعی است که حذف μ بین این دو رابطه، می بایست به صورت اختلالی انجام شود و این کار البته با روش های عددی خیلی راحت تر از روش های تحلیلی امکان پذیر است.



شکل ۸: طرح تراکم ذرات در لایه های انرژی در دمای صفر. شکل سمت چپ: وقتی که میدان مغناطیسی کوچکتر از مقدار بحرانی است. شکل سمت راست: وقتی که میدان مغناطیسی بزرگ تر از مقدار بحرانی است. مقدار این میدان مغناطیسی بحرانی را می توان حساب کرد.

۸ مسئله ها:

■ **مسئله اول:** رابطه (۳۷) را بدست آورید.

■ **مسئله دوم:** نشان دهید که برای یک گاز فرمیونی رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_P = -\frac{5}{2T} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}. \quad (۱۴۳)$$

سپس نشان دهید که

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3} \frac{f_{5/2}(z)f_{1/2}(z)}{(f_{3/2}(z))^2}. \quad (۱۴۴)$$

■ **مسئله سوم:** نشان دهید که ضریب تراکم پذیری همدم و ضرایب تراکم پذیری بی در رو برای یک گاز فرمی به ترتیب برابرند با:

$$\kappa_T = \frac{1}{nkT} \frac{f_{1/2}(z)}{f_{3/2}(z)}, \quad \kappa_S = \frac{3}{5nkT} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{5/2}(z)}, \quad (145)$$

که در آن ها n چگالی گاز است. سپس نشان دهید که در دماهای کم این ضرایب به صورت زیر خواهند بود:

$$\kappa_T \approx \frac{3}{2n\epsilon_F} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right], \quad \kappa_S \approx \frac{3}{2n\epsilon_F} \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (146)$$

■ **مسئله چهارم:** فرض کنید که در یک گاز فرمی رابطه انرژی و تکانه به جای $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ به صورت $\epsilon = \alpha p^s$ است.

الف: برای این گاز انرژی فرمی را بر حسب چگالی بدست آورید.

ب: نشان دهید که برای این گاز در d بعد، رابطه زیر برقرار است: $PV = \frac{s}{d} U$

■ **مسئله پنجم:** در حدی که اثرات کوانتومی ضعیف هستند، تراکم پذیری یک گاز فرمی خنثی را تا رتبه دوم بر حسب $n\lambda^d$ را بدست آورید. همین کار را برای ظرفیت گرمایی ویژه انجام دهید.

■ **مسئله ششم:** در دمای صفر، مغناطش کل یک گاز پارامغناطیسی فرمی را بدست آورید. سپس نفوذپذیری مغناطیسی را محاسبه کنید.

■ **مسئله هفتم:** برای یک گاز فرمی پارامغناطیسی در دو بعد و در حدی که اثرات کوانتومی ضعیف هستند، مغناطش کل و تراکم پذیری را تا رتبه دوم از $n\lambda^2$ محاسبه کنید.

۹ ضمیمه ها:

۱۰.۹ اثبات رابطه (۲۳)

با توجه به رابطه ای که قبل از رابطه (۲۳) ثابت کردیم می نویسیم:

$$\begin{aligned} z f'_n(z) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-1} \left[-\frac{d}{dx} \frac{1}{1+z^{-1}e^x} \right] dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \left[-\frac{x^{n-1}}{1+z^{-1}e^x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty (n-1) \frac{x^{n-2}}{1+z^{-1}e^x} dx \right] \\ &= 0 + \frac{1}{\Gamma(n-1)} \int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{1+z^{-1}e^x} dx = f_{n-1}(z) \end{aligned} \quad (147)$$

۲.۹ اثبات رابطه (۲۸)

تابع فرمیونی $f_n(z)$ به این صورت تعریف می شود:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{1 + z^{-1} e^x}. \quad (۱۴۸)$$

برای آنکه بسط توانی این تابع را برای z های کوچک بدست آوریم به ترتیب زیر عمل می کنیم: نخست کسر داخل انتگرال را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-1} dx z e^{-x} \frac{1}{1 + z e^{-x}} \quad (۱۴۹)$$

چون $z e^{-x}$ کوچکتر از ۱ است، می توانید از بسط دو جمله ای استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-1} dx z e^{-x} \sum_{l=0}^\infty (-1)^l z^l e^{-lx} \\ &= \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(n)} (-1)^l z^{l+1} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x(l+1)} dx. \end{aligned} \quad (۱۵۰)$$

اما انتگرال بالا برابر است با $\frac{1}{(l+1)^n} \Gamma(n)$. بنابراین

$$f_n(z) = z - \frac{z^2}{2^n} + \frac{z^3}{3^n} - \frac{z^4}{4^n} + \dots \quad (۱۵۱)$$

۳.۹ اثبات رابطه (۲۹)

می دانیم تابع $f_n(z)$ به شکل $f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{1 + z^{-1} e^x}$ تعریف شده است. ممکن است فکر کنیم حال که z بزرگ است این تابع را می توان بر حسب قوای متولی z^{-1} بسط داد اما این کار درست نیست زیرا اگرچه z^{-1} کوچک است ولی در زیر انتگرال و با افزایش x بالاخره e^x انقدر بزرگ می شود تا اینکه $z^{-1} e^x$ از ۱ بزرگ تر می شود و بسط دوجمله ای را از اعتبار می اندازد. پس راه درست این است که دامنه انتگرال را به دو قسمت تبدیل کنیم، یکی قسمتی که در آن $z^{-1} e^x < 1$ و دیگری قسمتی که در آن $z^{-1} e^x > 1$ و برای هر کدام یک شیوه متفاوت بسط اختیار کنیم. بهتر است پارامتر ξ را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$z = e^\xi, \quad \xi = \ln z. \quad (۱۵۲)$$

هم چنین فعلا از ضرب $\frac{1}{\Gamma(n)}$ صرف نظر می کنیم و تابع $\tilde{f}_n(z) = \Gamma(n) f_n(z)$ را بسط می دهیم:

$$\tilde{f}_n(z) = \int_0^\xi \frac{x^{n-1} dx}{1 + e^{x-\xi}} + \int_\xi^\infty \frac{x^{n-1} dx}{1 + e^{x-\xi}}. \quad (۱۵۳)$$

در هر دو انتگرال تغییر متغیر می دهیم. در انتگرال اول قرار می دهیم $x - \xi = -u$ و در انتگرال دوم قرار می دهیم: $x - \xi = u$.
بنابر این خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n(\xi) &= \int_0^\xi \frac{(\xi - u)^{n-1}}{1 + e^{-u}} du + \int_0^\infty \frac{(\xi + u)^{n-1}}{1 + e^u} du \\ &= \int_0^\xi (\xi - u)^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} (-e^{-u})^l du + \int_0^\infty e^{-u} (\xi + u)^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} (-e^{-u})^l du.\end{aligned}\quad (154)$$

در انتگرال اول جمع را می توان به دو قسمت $l = 0$ و $l > 0$ جدا کرد. در قسمت $l > 0$ بدلیل وجود جملات e^{-lu} می توان با تقریب خیلی خوب حد بالای انتگرال را به سمت ∞ میل داد. بنابراین پس از محاسبه انتگرال جمله $l = 0$ و جمع و جور کردن جملات خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n(\xi) &= \frac{1}{n} \xi^n + \int_0^\infty [(\xi - u)^{n-1} - (\xi + u)^{n-1}] \sum_{l=1}^{\infty} (-e^{-u})^l du \\ &= \frac{1}{n} \xi^n + \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \xi^{n-1-k} u^k [(-1)^k - 1] \right) \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l e^{-lu} du \\ &= \frac{1}{n} \xi^n + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{\infty} \binom{n-1}{k} \xi^{n-1-k} (-1)^l [(-1)^k - 1] \int_0^\infty u^k e^{-lu} du.\end{aligned}\quad (155)$$

مقدار انتگرال آخر برابر است با $\frac{k!}{l^{k+1}}$.

بنابراین بدست می آوریم:

$$\tilde{f}_n(z) = \frac{1}{n} \xi^n + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=odd}^{n-1} (-1)^{l-1} \frac{1}{l^{k+1}} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \xi^{n-1-k} \quad (156)$$

می توانیم طرف را ست را به صورت فشرده تری بنویسیم. جمع روی l را انجام می دهیم. قرار می دهیم:

$$\eta(k) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{4^{k+1}} + \dots \quad (157)$$

بنابراین تابع $\tilde{f}_n(z) := f_n(\xi)$ می شود:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \xi^n \left[1 + 2 \sum_{k=odd}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-k)!} \frac{\eta(k)}{\xi^{k+1}} \right]. \quad (158)$$

می توان از این هم پیش تر رفت و تابع $\eta(k)$ را به تابع زتای ریمان ربط داد. برای این کار کافی است که به طرفین رابطه قبلی عبارت

$$A = 2 \left[\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{4^{k+1}} + \frac{1}{6^{k+1}} + \dots \right]$$

را اضافه کرد. باتوجه به این که

$$\eta(k) + A = 1 + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{4^{k+1}} + \cdots = \xi(k+1) \quad (159)$$

که در آن $\xi(k) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^k}$ تابع زتای ریمان^۵ است. اما نکته جالب این است که A را نیز می توان بر حسب این تابع نوشت زیرا:

$$A = 2 \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \xi(k+1). \quad (160)$$

بنابراین

$$\eta(k) = (1 - 2^{-k}) \xi(k+1). \quad (161)$$

می توان ثابت کرد که :

$$(162)$$

$$\xi(1) = \infty, \quad \xi\left(\frac{3}{2}\right) = 2.612, \quad \xi(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1.645, \quad \xi(3) = 1.202, \quad \xi(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \dots$$

چند جمله اول تابع $f_n(\xi)$ به صورت زیر است:

$$f_n(\xi) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \xi^n \left[1 + n(n-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\xi^2} + n(n-1)(n-2)(n-3) \frac{7\pi^4}{360} \frac{1}{\xi^4} + \cdots \right].$$

۱۰. قدردانی

از آقای آرمین یداللهی دانشجوی این درس در سال ۱۴۰۳ که با دقت استثنایی تمامی اشکالات متن اولیه این درسنامه را به من یادآوری کردند تشکر می کنم. آخرین ویرایش این درسنامه را در پاییز سال ۱۴۰۴ دانشجوی درس مکانیک آماری پیشرفته، کیا جمشیدی با دقت فوق العاده ای خواند و اشکالات خارج از شمار آن را برایم مشخص کرد. بیشتر این اشکالات نگارشی بودند اما در چند جا نیز غلط های مفهومی را به من یادآوری کرد. از این بابت خیلی از کیا ممنونم.